Расчетная работа №2:Решение СЛАУ методом Гаусса, методом обратной матрицы, методом Крамера.

Цель: подобрать оптимальный метод решения Вашей системы линейных алгебраических уравнений, изучить теорию выбранного метода, решить Вашу систему линейных уравнений, рассмотрев подробно разобранные решения характерных примеров и задач.

Основные теоретические положения:

Метод Крамера

Метод Крамера (правило Крамера) — способ решения квадратных систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем основной матрицы (причём для таких уравнений решение существует и единственно).

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}\times x_1+a_{12}\times x_2+a_{13}\times x_3+\cdots+a_{1n}\times x_n=b_1 \\ a_{21}\times x_1+a_{22}\times x_2+a_{23}\times x_3+\cdots+a_{2n}\times x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}\times x_1+a_{i2}\times x_2+a_{i3}\times x_3+\cdots+a_{in}\times x_n=b_i \\ \vdots \\ a_{n1}\times x_1+a_{n2}\times x_2+a_{n3}\times x_3+\cdots+a_{nn}\times x_n=b_n \end{cases}$$

ТЕОРЕМА. Если главный определитель Δ составленный из коэффициентов при неизвестных системы n линейных уравнений с n неизвестными, отличный от нуля, то такая система уравнений имеет единственное решение (совместима и определена), которое вычисляется по формулам:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\cdots,x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ - главный определитель системы, который образуется из коэффициентов при неизвестных в левой части системы;

Δ_j - Определитель, который получается заменой j-го столбца в главном определителе на столбец свободных членов.

Метод Гаусса

Метод Гаусса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которого последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

$$\begin{cases} a_{11}\times x_1+a_{12}\times x_2+a_{13}\times x_3+\cdots+a_{1n}\times x_n=b_1 \\ a_{21}\times x_1+a_{22}\times x_2+a_{23}\times x_3+\cdots+a_{2n}\times x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}\times x_1+a_{i2}\times x_2+a_{i3}\times x_3+\cdots+a_{in}\times x_n=b_i \\ \vdots \\ a_{m1}\times x_1+a_{m2}\times x_2+a_{m3}\times x_3+\cdots+a_{mn}\times x_n=b_m \end{cases} \quad (1)$$

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса:

Прямой ход

- I шаг: осуществляется так называемый прямой ход, когда путём элементарных преобразований над строками систему приводят к ступенчатой или треугольной форме, либо устанавливают, что система несовместна. Делим первое уравнение на $a_{11}\neq 0$ (если , $a_{11}=0$ то изменить порядок уравнений, выбрав первым такое уравнение, в котором коэффициент при x не равен нулю), умножаем полученное уравнение на $a_{i1} \neq 0$ и вычитаем из i-го ур-я. Получим систему вида:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12} \times x_2 + b_{13} \times x_3 + \cdots + b_{1n} \times x_n = b_1 \\ b_{22} \times x_2 + b_{23} \times x_3 + \cdots + b_{2n} \times x_n = b_2 \\ \vdots \\ b_{i2} \times x_2 + b_{i3} \times x_3 + \cdots + b_{in} \times x_n = b_i \\ \vdots \\ b_{m2} \times x_2 + b_{m3} \times x_3 + \cdots + b_{mn} \times x_n = b_m \end{cases}$$

причем b_{ij} получаются из a_{ij} по следующим формулам:

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2,\ 3,\ \cdots, m);$$

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{i1} \times b_{1j} \quad (i = 2,\ 3,\ \cdots, n;\ j = 2,\ 3,\ \cdots, m);$$

- II шаг: Повторяем действия первого шага, только за начальное уравнение берем уже i-ое уравнение. В итоге исходная система преобразуется к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12} \times x_2 + b_{13} \times x_3 + \cdots + b_{1n} \times x_n & = b_1 \\ x_2 + c_{23} \times x_3 + \cdots + c_{2n} \times x_n & = b_2 \\ \vdots \\ x_i + \cdots + d_{in} \times x_n & = b_i \\ \vdots \\ f_{mn} \times x_n & = b_m \end{cases}, -$$

тогда система совместна и определена и имеет одно решение

или $$\begin{cases} x_1 + b_{12} \times x_2 + b_{13} \times x_3 + \cdots + b_{1n} \times x_n & = b_1 \\ x_2 + c_{23} \times x_3 + \cdots + c_{2n} \times x_n & = b_2 \\ \vdots \\ x_i + \cdots + d_{mn} \times x_n & = b_m \end{cases},$$

тогда система совместна и неопределенна и имеет бесчисленное множество решений

<u>Метод обратной матрицы</u>

Запишем систему (1) в матричном виде:
AX=B, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{v1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда число неизвестных совпадает с числом уравнений.
Тогда решение системы находится по формуле: $A^{-1}B = X$

<u>Индивидуальные задания</u>

1. Решить систему уравнений методом Гаусса.
2. Решить систему уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы.
3. Выполнить действия над матрицами, применяя возможности электронной таблицы Microsoft Excel

При решении систем обязательно **выполнить проверку**.

Вариант №1

1) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} 5x + 8y - z = -7 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

3) $2\,(A + B)\,(2B - A)$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант №2

1) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

3) $3A - (A + 2B)B$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант №3

1) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

3) $2(A-B)(A^2 + B)$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -10 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант №4

1) $$\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

3) $(A^2 - B^2)(A + B)$, где $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант №5

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$

3) $(A-B^2)(2A+B)$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант №6

1) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9 \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = -9 \\ 3x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

3) $(A - B)\,A + 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант №7

$\begin{cases} 2x_1 \\ x_1 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \\ 2 \\ 4 \end{cases}$

3) 2(A

Вариант №8

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$

3) $(A - B)A + 3B$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант №9

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

3) $2A - (A^2 + B)B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Вариант №10

1) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = -9 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7 \\ 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$

3) $3(A^2 - B^2) - 2AB$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Вариант №11

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

3) (2A-B)(3A+B)-2AB, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Вариант №12

x_1

3) A (A

Вариант №13

1) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = -9 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7 \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = -16 \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

3) (A+B)A-B(2A+3B), где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 16 \end{pmatrix}$

Вариант №14

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 16 \\ 3x - 2y - 5z = 12 \end{cases}$

3) A(2A+B)-B(A-B), где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант №15

1) $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 12 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ 2x - y - 3z = -1 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$

3) 3(A+B)(AB-2A), где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 22 & -14 & 3 \\ 6 & -7 & 0 \\ 11 & 3 & 15 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы

1)Сформулируйте постановку задачи решения системы *n* линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и укажите условия существования и единственности решения.

2)На примере СЛАУ из трех уравнений объясните смысл схем метода Гаусса.

3)Каким образом при решении СЛАУ методом Гаусса можно попутно вычислить определитель матрицы системы?

В выводе укажите метод решения СЛАУ, наиболее приемлемый для Вас.